

**BREVIAR TEORETIC CU EXEMPLE CONCRETE,
PENTRU PREGĂTIREA EXAMENULUI DE
EVALUARE NAȚIONALĂ, clasa a VIII-a - 2010**

Propunător: Prof. IGN. TESCU VIOREL OVIDIU

Școala cu clasele I-VIII Mătești, com. Săpoca, jud. Buzău

I. MULȚIMI

I.1 MULȚIMI; RELAȚII

Mulțimea este un ansamblu de obiecte, numite elemente, grupate fie prin indicarea tuturor elementelor, fie prin formularea unor proprietăți caracteristice lor și numai lor.

Exemple:

1. $C = \{\text{mulțimea caietelor școlare}\}$
2. $M = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$
3. $E = \{e, l, v \text{ elementele cuvântului elev}\}$
4. $D = \{x/x \text{ este elev în clasa a VIII a}\}$

Observație: un element într-o mulțime apare numai o singură dată.

Exemple:

1. $9 \in M; 12 \notin M$ se citește 9 **aparține** mulțimii M , respectiv 12 **nu aparține** mulțimii M
2. $e \in E, a \notin E$
3. $B = \{x/x \in \mathbb{N}, x \leq 3\}$

Mulțimea care nu are nici un element se numește **mulțimea vidă**. Mulțimea vidă este notată cu \emptyset .

Observație: Există o singură mulțime vidă.

O mulțime A este **inclusă** într-o mulțime B dacă și numai dacă fiecare element al lui A este element și pentru mulțimea B .

Notație: $A \subseteq B$ și se citește „ A este inclus în B ”

$D \not\subseteq V$, și citește „ D nu este inclus în V ”

O mulțime A este **submulțime** a mulțimii B dacă toate elementele lui A sunt și în B , sau altfel A este inclus în B .

Mulțimea \emptyset este submulțime pentru oricare mulțime.

Exemple $P = \{1,2,3,4\}$; $Q = \{1,2,3\}$ $Q \subseteq P$

Două **mulțimi** sunt **egale** dacă au aceleași elemente.

Notație: $A = B$

I.2 OPERAȚII CU MULȚIMI

Intersecția

Mulțimea elementelor comune mulțimilor A și B (fiecare element comun mulțimilor A și B figurând o singură dată) se numește **intersecția** mulțimilor A și B .

Astfel: $A \cap B = \{x/x \in A \text{ și } x \in B\}$

Nota ie: $A \cap B$, i se cite te „intersec ia mul imilor A i B”.

Exemple: $A = \{1,3,5\}$ iar $B = \{1,2,5\}$ atunci $A \cap B = \{1,5\}$ (se iau elementele comune o singur dat).

Dou **mul imi** sunt **disjuncte** dac intersec ia lor este mul imea vid .

Exemple: $P = \{2,8,7\}$ iar $Q = \{1,3,5\}$ $P \cap Q = \emptyset$

Reuniunea

Mul imea în care se afl toate elementele mul imilor A i B, i numai ale lor (fiecare element comun mul imilor figurând o singur dat), se nume te **reuniunea** mul imilor A i B.

Astfel: $A \cup B = \{x/x \in A \text{ sau } x \in B\}$

Nota ie: se cite te „reuniunea mul imilor A i B”.

Exemple: $A = \{1,3,5\}$ iar $B = \{1,2,5\}$ atunci $A \cup B = \{1,2,3,5\}$ (se iau toate elementele o singur dat).

Diferen a

Mul imea elementelor care apar in mul imii A, dar care nu apar in mul imii B, se nume te **diferen a** dintre mul imile A i B.

Astfel: $A - B = \{x/x \in A \text{ i } x \notin B\}$

Nota ie: $A - B$ sau $A \setminus B$ i se nume te „diferen a mul imilor A i B”.

Exemple: $A = \{1,3,5\}$ iar $B = \{1,2,5\}$ atunci $A - B = \{3\}$.

I.3 MUL IMI FINITE, MUL IMI INFINITE

Observ m c exist mul imi vide i mul imi cu un num r finit de elemente, numite **mul imi finite**.

Cardinalul unei mul imi finite este num rul finit de elemente, numite mul imi finite.

Exemple:

1. $A = \{2,4,6,8\}$, vom scrie card $A = 4$
2. Dac $A = \emptyset$, vom scrie card $A = 0$

O **mul ime infinit** este o mul ime pentru care irul elementelor este nesfâr it.

Exemple:

\mathbb{N} – mul imea numerelor naturale $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 4, \dots\}$

\mathbb{N}^* - mul imea numerelor naturale nenule $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 4, \dots\}$

\mathbb{Z} – mul imea numerelor întregi $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

\mathbb{Q} – mul imea numerelor ra ionale (care pot fi scrise sub form de frac ie)

\mathbb{R} – mul imea numerelor reale

Observa ie. Între mul imile de mai sus, exist rela ia: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

I.4 PROPOZI II

Un element a c rei valoare de adev r este bazat pe reguli explicit exprimate se nume te **propozi ie**.

O propozi ie se nume te **propozi ie adev rat** dac ea exprim un adev r.

Exemple:

Ora ul Nehoiu se afl în jude ul Buz u.

$5 \times 3 = 15$

O **propozi ie** se nume te **fals** dac ea exprim un neadev r.

Exemple:

Municipiul Buz u este în Africa.

$12 : 2 = 7$

Nota ie: Cu A se noteaz o propozi ie adev rat , iar cu F se noteaz o propozi ie fals i se spune c **valoarea logic** sau **valoarea de adev r** a unei propozi ii este A sau F.

Opera ia de schimbare a valorii de adev r a unei propozi ii se nume te **negarea** propozi iei.

Exemple:

Orașul Nehoiu nu se află în județul Buzău. (F)

$5 \cdot 3 \neq 15$ (F)

Municipiul Buzău nu este în Africa. (A)

I.5 MULȚIMEA NUMERELOR NATURALE

Numerele naturale sunt reprezentate prin cifre sub forma următorului șir: 0,1,2,3,, 10,11,

Observație: Semnul „.....”, indică faptul că am omis să scriem unele numere naturale. Nu putem scrie toate numerele naturale, după un număr natural urmează încă unul și așa mai departe.

Proprietate: Șirul numerelor naturale este infinit.

Observație: Numerele naturale se pot reprezenta pe o dreaptă.

O dreaptă pe care am fixat o origine, un sens și o măsură, se numește **axa numerelor**.

I.5.1 Inegalitatea dintre numerele naturale

Vom spune că un număr natural a este **mai mare decât** un număr natural b și vom scrie $a > b$, dacă există un număr natural c , diferit de numărul 0, astfel încât să avem $a = b + c$. Acest lucru se mai numește și **inegalitate strictă**. Dacă avem două numere naturale a, b și dorim a indica faptul că a este mai mare sau egal cu b scriem $a \geq b$ și citim „ a este mai mare sau egal cu b ”. Acest lucru se mai numește inegalitate nestrictă.

Exemple:

2 mai mare ca 1, deoarece există $c=1$ care adunat cu 1 să fie egal cu 2.

Criterii de inegalitate a numerelor naturale:

1. Este mai mare numărul în care o cifră este mai mare decât cifra de același ordin din cel de-al doilea număr, cifrele de ordine superioară fiind egale două câte două.
2. Dintre două numere naturale, care au același număr de cifre, este mai mare acela care are mai multe cifre.

I.5.2 Scrierea numerelor naturale în baza 10

Orice număr natural admite o **descompunere în baza 10**.

Exemple:

$$\begin{aligned} 5307 &= 5000 + 300 + 7 \\ &= 5 \cdot 1000 + 3 \cdot 100 + 7 = \\ &= 5 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 \end{aligned}$$

În general, numărul \overline{abcd} , unde a, b, c, d , sunt cifre, cu $a \neq 0$, se scrie sub următoarea formă:

$$\overline{abcd} = a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d \cdot 10^0$$

Membrul stâng al egalității de mai sus reprezintă scrierea unui număr natural în baza zece, iar membrul drept, scrierea aceluiași număr sub formă zecimală desfurată.

I.5.3 Operații cu numere naturale

Adunarea

Prin **suma** a două numere naturale a și b numite **termenii** sumei se obține al treilea număr natural notat $s = a + b$.

Proprietățile adunării numerelor naturale:

1. Oricare ar fi numerele naturale a și b avem: $a + b = b + a$ (**comutativitatea** adunării).
2. Oricare ar fi numerele a, b , și c avem: $(a + b) + c = a + (b + c)$ (**asociativitatea** adunării).

3. există numărul natural 0 numit **element neutru** care nu modifică prin adunare valoarea oricărui număr natural.

Scăderea

Dacă a și b sunt două numere naturale, astfel încât $a \geq b$, **diferența** dintre a și b , notată prin $a - b$, este acel număr natural c , pentru care $a = b + c$. Termenul a se numește **descăzut** iar b se numește **scăzut**.

Înmulțirea

Produsul unui număr natural, diferit de 0 și de 1, se exprimă printr-o sumă în care primul apare ca termen de atâtea ori de câte ori arată al doilea număr natural.

Excepții:

1. Produsul unui număr natural 0 este 0.
2. Produsul unui număr natural cu 1 este numărul natural considerat.

Proprietățile înmulțirii numerelor naturale:

1. Oricare ar fi numerele naturale a și b avem:

$$a \cdot b = b \cdot a \text{ **comutativitatea** \text{ înmulțirii}}$$

2. Oricare ar fi numerele naturale a , b și c avem:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \text{ **asociativitatea** \text{ înmulțirii}}$$

3. Există numărul natural 1 numit **element neutru** care nu modifică prin înmulțire valoarea oricărui număr natural

4. oricare ar fi numerele a , b și c avem: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ **distributivitatea înmulțirii față de adunare.**

$$\text{Exemplu: } 2 \cdot (3 + 4) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 6 + 8 = 14$$

5. Oricare ar fi numerele a , b și c avem: $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$ **distributivitatea înmulțirii față de scădere**

Împărțirea

Operația inversă a înmulțirii, când se cunoaște produsul și trebuie aflat unul din factorii **împărțirea**. Semnul operației este „:”

Exemplu:

Deîmpărțit **Împărțitor** **Cât**

$$12 : 3 = 4$$

Observații:

1. Împărțirea nu are totdeauna rezultat în mulțimea numerelor naturale

Exemplu: 7 nu se poate împărți exact la 3 (nu există $n \in \mathbb{N}$ a.î. $3 \cdot n = 7$)

2. **Împărțirea cu 0 nu este posibilă** deoarece nu există nici un număr natural care, înmulțit cu 0 să dea un număr diferit de 0.

3. Câtul dintre 0 și un număr natural a , diferit de 0, este 0.

Teorema împărțirii cu rest a numerelor naturale Oricare ar fi numerele naturale a și b , cu $b \neq 0$, există și sunt unice două numere naturale q și r astfel încât $a = b \cdot q + r$, unde $r < b$.

Puterea unui număr natural

Dacă a și n sunt numere naturale, unde n este diferit de 0 și 1; atunci:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_{n \text{ factori}}$$

n factori

în care se numește **baza** puterii, iar n se numește **exponentul** puterii.

Exemplu: $5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$

Excepții:

1. orice număr natural ridicat la puterea 0 este 1
2. orice număr natural ridicat la puterea 1 este numărul în sine.

Proprietățile puterii numerelor naturale:

Dacă a, m, n sunt numere naturale, atunci:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
3. $a^m : a^n = a^{m-n}$

I.5.4 Divizibilitatea numerelor naturale

Un număr natural a este **divizibil** cu un număr natural $b \neq 0$ dacă există un număr natural c , astfel ca $a = b \cdot c$. Se mai spune că „ a se divide cu b ”, „ b se divide pe a ” sau că „ a este multiplu al lui b ”.

Notație:

b/a și se citește „ b divide pe a ”

$a:b$ și se citește „ a este divizibil cu b ”

Exemplu: 6 este divizibil cu 2, pentru că există 3 astfel încât $6 = 2 \cdot 3$

Toți divizorii unui număr natural poartă denumirea de **mulțimea divizorilor** acelui număr natural.

Exemplu: Fie $n = 12$ $D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

Observație: Orice număr natural m are **divizori improprii** 1 și m . Orice alt divizor este numit **divizor propriu**.

Proprietățile ale divizibilității numerelor naturale

1. Orice număr natural este divizibil cu 1. Astfel: $1/a$ oricare ar fi $a \in \mathbb{N}$
2. 0 este divizibil cu orice număr. Astfel: $a/0$, oricare ar fi $a \in \mathbb{N}$
3. Orice număr natural se divide cu el însuși. Astfel: a/a oricare ar fi $a \in \mathbb{N}$
4. Fie a și b două numere naturale. Dacă a este divizibil cu b și b este divizibil cu a , atunci $a = b$

Astfel: dacă a/b și b/a , atunci $a = b$ oricare ar fi $a, b \in \mathbb{N}$

5. Fie a, b, c trei numere naturale. Dacă b se divide cu a , iar c se divide cu b atunci c se divide cu a .

Astfel: dacă a/b și b/c , atunci a/c oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{N}$

Exemplu: $2/6$ și $6/12$, atunci $2/12$

6. Dacă un număr natural se divide cu un număr natural, atunci primul se divide cu toți divizorii celui de-al doilea.

Exemplu: Numărul 24 se divide cu toți divizorii lui 12 adică 1, 2, 3, 4, 6, 12

7. Dacă fiecare termen al unei sume de două numere naturale se divide cu un număr natural, atunci și suma lor se divide cu acel număr natural. Dacă a/b și m/b , atunci $m/(a+b)$, oricare ar fi $a, b, m \in \mathbb{N}$

Exemple: 12 se divide cu 3; 15 se divide cu 3

$$12 + 15 = 27 \text{ iar } 27 \text{ se divide cu } 3$$

8. Dacă unul dintre termenii unei sume de două numere naturale se divide cu un singur număr natural, iar celălalt termen m se divide cu acel număr natural, atunci suma nu se divide cu acel număr natural.

9. Fie a, b, m numere naturale, $a \geq b$. Dacă a se divide cu m și b se divide cu m , atunci și $a - b$ se divide cu m . Astfel:
 Dacă m/a și m/b , atunci $m/(a-b)$ oricare ar fi $a, b, m \in \mathbb{N}$, $a \geq b$
 Exemplu: Fie diferența $10 - 4$, $10 \geq 4$, 10 se divide cu 2 , 4 se divide cu 2 . Diferența $10 - 4 = 6$ se divide cu 2 .
10. Dacă un număr natural a se divide cu un număr natural m , atunci produsul lui a cu orice număr natural se divide cu m .
 Astfel: Dacă m/a , atunci m/ab , oricare ar fi $a, b, m \in \mathbb{N}$
 Exemple: 6 se divide cu 2 $6 \cdot 7 = 42$ se divide cu 2

I.5.5 Criterii de divizibilitate

1. Criteriul de divizibilitate cu 10

- Un număr natural care are ultima cifră egală cu 0, se divide cu 10
- Un număr natural care are ca ultimă sa cifră pe 0, se divide cu 2 și 5

Exemple: 130 se divide cu 10 $130 \cdot 10 = 1300$, deci se divide cu 2 și 5; $65 \cdot 2 = 130$; $26 \cdot 5 = 130$

2. Criteriul de divizibilitate cu 2

- Dacă ultima cifră a unui număr natural este o cifră pară, atunci acel număr se divide cu 2.

Exemplu: $220, 222, 224, 226, 228$, se divid cu 2, deoarece au fiecare ultima cifră pară: 0, 2, 4, 6, 8.

3. Criteriul de divizibilitate cu 5

- Dacă ultima cifră a unui număr natural este 5 sau 0, atunci acel număr se divide cu 5.

Exemplu: 435 se divide cu 5; 190 se divide cu 5.

4. Criteriul de divizibilitate cu 4

- Dacă numărul format din ultimele două cifre ale unui număr natural este divizibil cu 4, atunci numărul considerat este divizibil cu 4

Exemplu: 224 se divide cu 4 deoarece 24 se divide cu 4

5. Criteriul de divizibilitate cu 25

- Dacă numărul natural format din ultimele două cifre ale unui număr natural este divizibil cu 25, atunci numărul considerat este divizibil cu 25.

Exemplu: 225 se divide cu 25, deoarece 25 se divide cu 25.

6. Criteriul de divizibilitate cu 3

- Dacă suma cifrelor unui număr natural este divizibilă cu 3, atunci acel număr este divizibil cu 3.

Exemplu: Numărul 47193 este divizibil cu 3, deoarece $4+7+1+9+3=24$ și $3/24$

7. Criteriul de divizibilitate cu 9

- Dacă suma cifrelor unui număr natural este divizibilă cu 9, atunci acel număr este divizibil cu 9

Exemplu: numărul 47160 este divizibil cu 9 deoarece $4+7+1+9+3=18$, care se divide cu 9.

I.5.6 Numere prime

Se numește **număr prim** orice număr natural, diferit de 1, care are divizori numai pe 1 și pe el însuși.

Astfel: Se numește număr prim acel număr natural care are numai doi divizori.

De aici: Se numește **număr compus** numărul cu cel puțin 3 divizori.

Observație: Numărul 1 nu admite decât un singur divizor, deci el nu este nici prim și nici număr compus.

Algoritm pentru a stabili dacă un număr este prim sau nu:

1. Împărțim numărul pe rând, la toate numerele prime în ordine crescătoare începând cu 2, până când obținem un cât mai mic sau egal cu împărțitorul. Dacă numărul se divide cu unul din aceste numere prime, este evident că el nu este prim.

Tabel cu numere prime până la 1000

2	61	149	239	347	443	563	659	773	887
3	67	151	241	349	449	569	661	787	907
5	71	157	251	353	457	571	673	797	911
7	73	163	257	359	461	567	677	809	919
11	79	167	263	367	463	583	683	811	929
13	83	173	269	373	467	593	691	821	937
17	89	179	271	379	479	599	701	823	941
19	97	181	277	383	487	601	709	827	947
23	101	191	281	389	491	607	719	829	953
29	103	193	283	397	499	613	727	839	967
31	107	197	293	401	503	617	733	853	971
37	109	199	307	409	509	619	739	857	977
41	113	211	311	419	521	631	743	859	983
43	127	223	313	421	523	641	751	863	991
47	131	227	317	431	541	643	757	877	997
53	137	229	331	433	547	647	761	881	-
59	139	233	337	439	557	653	769	883	-

I.5.7 Descompunerea numerelor naturale în factori primi (C.m.m.d.c. și C.m.m.m.c.)

A descompune un număr natural în factori primi înseamnă să scrie acel număr ca produs de puteri ale celor mai mici baze sunt numere prime distincte.

De obicei, factorii se scriu în ordinea crescătoare a bazelor. Această scriere este unică.

Exemplu: $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

Cel mai mare divizor comun al numerelor naturale a și b , nu ambele nule este numărul natural care:

1. divide pe a și pe b
2. este divizibil cu orice număr care divide pe a și pe b .

Acesta se notează cu $(a; b)$.

Pentru a afla c.m.m.d.c. al mai multor numere procedăm astfel:

- descompunem numerele în factori primi
- facem produsul factorilor primi comuni tuturor numerelor, cu exponenții cei mai mici și amobinăm c.m.m.d.c.

Observație: Dacă două sau mai multe numere naturale au c.m.m.d.c. egal cu 1, atunci ele se numesc numere prime între ele.

Exemplu: $(360; 2100; 1980) = ?$

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$$

$$2100 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$$

$$1980 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$$

$$\underline{\hspace{10em}} \\ 360; 2100; 1980 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$$

$$(6; 15; 10) = 1 \quad \text{deci} \quad (6; 15) = 3 \quad (15; 10) = 5 \quad \text{și} \quad (6; 10) = 2$$

Cel mai mic multiplu comun al numerelor naturale a și b este numărul natural care:

1. este multiplu al lui a și al lui b
2. divide orice alt multiplu al numerelor a și b

C.m.m.m.c. al numerelor naturale a și b se notează $[a; b]$

Observație: $[a; 0] = 0$, oricare ar fi numărul natural a

Exemple: $[3; 5] = 15$, $[6; 2] = 6$, $[8; 14] = 56$

Pentru a afla c.m.m.m.c. al mai multor numere procedăm astfel:

- descompunem numerele date în factori primi
- luăm toți factorii primi o singură dată, cu exponenții cei mai mari care apar în descompuneri. Produsul lor este c.m.m.m.c.

I.6 MULȚIMEA NUMERELOR ÎNTREGI

Numerele întregi reprezintă un șir de forma:

....., -11, -10 .., -2, -1, 0, 1, 2,, 10, 11,

unde prin semnul „-”, am însemnat numerele negative.

Mulțimea numerelor întregi se notează cu \mathbb{Z} . Evident, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

I.6.1 Valoarea absolută : Orice număr negativ ($-a$) are **valoarea absolută (modulul)** a , iar orice număr întreg pozitiv a are valoarea absolută a sau dacă a este 0, atunci modulul este 0.

Astfel:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{dacă } a \in \mathbb{Z}, a \geq 0 \\ -a, & \text{dacă } a \in \mathbb{Z}, a < 0 \end{cases}$$

Exemple: $|2| = 2$ $|3| = 3$ $|0| = 0$

1. Modulul unui număr întreg este un număr pozitiv: $|a| \geq 0$
2. $|-a| \geq |a|$ oricare ar fi $a \in \mathbb{Z}$

I.6.2 Operații cu numere întregi

Adunarea

Fie a, b două numere întregi. Se spune că $S = a + b$ este **suma** celor două numere și ea este tot un număr întreg.

Valoarea lui S se obține astfel:

Cazul I $a, b \geq 0$, deci termenii sumei sunt numere întregi și pozitive $S = a + b$, adunându-le și două numere naturale

Exemple: $2 + 3 = 5$ $4 + 7 = 11$

Cazul II, $a, b < 0$, deci termenii sumei sunt numere negative $S = -d$ unde $d = |a| + |b|$

Exemplu: $-2 - 3 = -5$ $-4 - 7 = -11$

Cazul III $a \geq 0, b < 0$, deci un termen pozitiv iar celălalt negativ:

Dacă $|a| = |b|$ atunci $S = 0$

$|a| \neq |b|$, atunci se calculează d ca fiind diferența dintre cel mai mare număr în modul și cel mai mic iar $S = d$ dacă numărul al cărui modul este mai mare este pozitiv, sau $S = -d$ dacă numărul al cărui modul este mai mare este negativ

Exemple: $-4 + 8 = 4$; $9 - 7 = 2$; $-109 + 11 = -98$ $12 - 23 = -11$

Înmulțirea

Prin **înmulțirea** a două numere întregi a și b se obține un al treilea număr întreg notat $p = a \cdot b$ sau $p = a \times b$ numit produsul numerelor întregi a și b .

Semnul numărului p este :

+ (plus) dacă numerele a și b au același semn

-(minus) dacă numerele a și b au semn contrar

ex:

$$(-1) \cdot (-5) = 5$$

$$(-1) \cdot 5 = -5$$

$$1 \cdot 5 = 5$$

$$1 \cdot (-5) = -5$$

I.6.3. Divizibilitatea la numere întregi

Un număr întreg a este **divizibil** cu un număr întreg b dacă există un număr întreg c astfel încât $a = b \cdot c$.

Obs: în raport cu divizorii unui număr natural se adaugă și numerele cu semnul $-$ (negative).

ex: divizorii lui 6 sunt: -6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6

divizorii lui 11 sunt: -11, -1, 1, 11.

I. 7. MULȚIMEA NUMERELOR RAȚIONALE

O fracție reprezintă una sau mai multe părți dintre părțile egale în care a fost împărțit un întreg (sau mai mulți întregi identici)

ex: $\frac{1}{4}$: 



O fracție se numește (sau fracția $\frac{a}{b}$ cu $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}^*$ este):

-**subunitar**, dacă numărătorul este mai mic decât numitorul ($a < b$) ex: $\frac{2}{5}$

-**echiunitar**, dacă numărătorul este egal cu numitorul ($a = b$) ex: $\frac{3}{3}$

-**supraunitar**, dacă numărătorul este mai mare decât numitorul ($a > b$) ex: $\frac{7}{2}$

Fracții echivalente: Fie $a, b, c, d \in \mathbb{Z}, b \neq 0, d \neq 0$. Fracțiile $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{d}$ se numesc **echivalente** dacă și numai dacă $a \cdot d = b \cdot c$.

ex: $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$ pentru că $2 \cdot 10 = 4 \cdot 5$

O fracție $\frac{a}{b}$ cu $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*$ se numește **irreductibil** atunci când numărătorul și numărătorul sunt numere prime între ele, adică c.m.m.d.c. al lor este 1.

ex: $\frac{15}{7}; \frac{21}{25}$

Numerele reprezentate printr-un raport de două numere întregi a, b cu forma $\frac{a}{b}$ cu $b \neq 0$ reprezintă mulțimea tuturor numerelor de forma dată mai sus și formează **mulțimea numerelor raționale**, care se notează cu \mathbb{Q} .

Un număr rațional poate fi reprezentat pe o axă a numerelor ocupând o poziție în raport de valoare sa.

I.7.1. Egalitatea numerelor raționale

Dou numere ra ionale notate cu $\frac{m}{n}$ si $\frac{a}{b}$ sunt egale dac frac iile $\frac{m}{n}$ si $\frac{a}{b}$ sunt frac ii echivalente adic dac $m \cdot b = n \cdot a$.

Rela ia de egalitate în domeniul numerelor ra ionale are propriet ile:

1. Reflexivitatea egalit ii:
 $a \in \mathbb{Q}$ avem $a = a$
2. Simetria egalit ii:
 $a, b \in \mathbb{Q}$, dac $a = b$ atunci $b = a$
3. Tranzitivitatea egalit ii:
 $a, b, c \in \mathbb{Q}$, dac $a = b$ i $b = c$, atunci $a = c$.
4. Rela ia de egalitate în domeniul numerelor ra ionale având propriet ile de reflexivitate, simetrie, tranzitivitate este o rela ie de echivalen .

I.7.2. Opera ii cu numere ra ionale

Adunarea

Suma a dou numere ra ionale $\frac{m}{n}$ si $\frac{a}{b}$ este dat de frac ia $\frac{mb+na}{nb}$.

ex:

$$\frac{-5}{2} + \frac{2}{3} = \frac{(-5) \cdot 3 + 2 \cdot 2}{2 \cdot 3} = \frac{-15 + 4}{6} = \frac{-11}{6}$$

$$\frac{-7}{4} + \frac{4}{-3} = \frac{(-7)(-3) + 4 \cdot 4}{4 \cdot (-3)} = \frac{-21 + 16}{-12} = \frac{-5}{-12} = \frac{5}{12}$$

Adunarea numerelor ra ionale are urm toarele propriet i

1. Comutativitatea adun rii:
 $a, b \in \mathbb{Q}$, atunci $a + b = b + a$
2. Asociativitatea adun rii:
 $a, b, c \in \mathbb{Q}$, atunci $(a + b) + c = a + (b + c)$
3. Exist elementul 0 numit element neutru cu proprietatea c :
 $a \in \mathbb{Q}$, atunci $a + 0 = 0 + a = a$
4. Exist elementul opus oric rui num r ra ional a , notat cu $-a$ astfel incat:
 $a \in \mathbb{Q}, \exists -a \in \mathbb{Q}$ a.î. $a + (-a) = (-a) + a = 0$

Sc derea

Oricare ar fi numerele ra ionale a i b avem $a - b = a + (-b)$. Astfel, dac dorim s sc dem dintr-un num r ra ional a un alt num r ra ional b , adun m la num rul ra ional a opusul num rului b adic $(-b)$

ex: $7 - 3 = 7 + (-3) = 4$

Obs:

1. Opera ia de sc dere se poate efectua între oricare ar fi aceste numere ra ionale
2. Oricare ar fi un num r ra ional avem: $a - 0 = a$, $0 - a = -a$
3. Oricare ar fi a, b, c numere ra ionale, dac avem $a = b$, avem: $a - c = b - c$
4. Oricare ar fi a, b, c, d numere ra ionale, dac $a = b$ i $c = d$, avem: $a - c = b - d$

Înmul irea

Prin **produsul** a dou numere ra ionale $\frac{m}{n}$ i $\frac{a}{b}$ se ob ine un al treilea num r ra ional notat cu c astfel: $c = \frac{m \cdot a}{n \cdot b}$

ex:

$$\frac{-2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{(-2) \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{-10}{21}$$

$$\frac{2}{-5} \cdot \frac{-1}{11} = \frac{2 \cdot (-1)}{(-5) \cdot 11} = \frac{-2}{-55} = \frac{2}{55}$$

Propriet ile înmul irii numerelor ra ionale:

1. Comutativitatea înmul irii:

$$a, b \in \mathbb{Q} \text{ atunci } a \cdot b = b \cdot a$$

2. Asociativitatea înmul irii:

$$a, b, c \in \mathbb{Q}, \text{ atunci } (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

3. Distributivitatea înmul irii fa de adunare:

$$a, b, c \in \mathbb{Q}, \text{ avem } a \cdot (b + c) = ab + ac$$

4. Exist elementul 1 numit element neutru cu proprietatea c :

$$a \in \mathbb{Q}, \text{ atunci } a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

5. Exist elementul invers oric rui num r ra ional a notat cu $\frac{1}{a}$ astfel: $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$

Obs:

1. Oricare ar fi a ra ional avem:

$$a \cdot (-1) = (-1) \cdot a = -a$$

2. Oricare ar fi a, b, c ra ionale, dac $a = b$ atunci $a \cdot c = b \cdot c$

3. oricare ar fi a, b, c, d ra ionale, dac $a = b$, $c = d$ atunci $a \cdot c = b \cdot d$

Împ r irea

Prin **câtul** a dou numere ra ionale $\frac{m}{n}$ i $\frac{a}{b}$ cu $a, b, n \neq 0$ se ob ine un al treilea num r ra ional

notat c astfel: $c = \frac{\frac{m}{n}}{\frac{a}{b}} = \frac{m}{n} \cdot \frac{b}{a}$ deci se înmul e te deîmp r itul cu inversul împ r itorului.

$$\text{ex: } \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} = \frac{14}{15}$$

Propriet ile împ r irii numerelor ra ionale

1. Oricare ar fi a num r ra ional, avem: $a : 1 = \frac{a}{1} = a$

2. Oricare ar fi a ra ional, avem: $1 : a = \frac{1}{a} = a^{-1}$

I.8 MUL IMEA NUMERELOR REALE

Mul imile de numere cunoscute sunt:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ -numerele naturale

$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ -numerele întregi

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} - \{0\} \right\}$ -numerele raționale

Mulțimea **numerelor reale** reprezintă reuniunea dintre mulțimea numerelor raționale și cele iraționale, notată cu \mathbb{R} .

Este evident că toate mulțimile studiate sunt submulțimi ale mulțimii numerelor reale:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Mulțimea numerelor iraționale se obține prin $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Obs:

1. Din punct de vedere geometric, mulțimea numerelor reale reprezintă o dreaptă care ia se aminte un punct numit origine corespunzător valorii 0 și un sens de parcurgere corespunzător numerelor pozitive, iar sensul opus corespunzător numerelor negative.

2. Mulțimea numerelor reale este infinită în ambele sensuri: pozitiv și negativ

$(-\infty, \infty)$, unde:

$-\infty$ se citește „minus infinit”

$+\infty$ se citește „plus infinit” sau infinit

I.8.1 Relația de ordine pe \mathbb{R}

Oricum am alege două numere a și b reale, există cel puțin una din relațiile $a > b$ sau $a \leq b$, astfel, oricare două numere reale pot fi comparate.

Astfel (\mathbb{R}, \leq) este o mulțime total ordonată în raport cu relația de ordine „ \leq ” (mai mic sau egal).

Proprietățile relației „ \leq ”:

1. Oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$, avem $a \leq a$
2. Oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$, dacă $a \leq b$ și $b \leq a$, atunci $a = b$
3. Oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{R}$, dacă $a \leq b$ și $b \leq c$, atunci $a \leq c$
4. Relația de ordine este compatibilă cu adunarea și înmulțirea numerelor reale în sensul că:
 - 1) Dacă $a, b, c \in \mathbb{R}$ și $a \leq b$, atunci $a + c \leq b + c$ și reciproc
 - 2) Dacă $a, b, c \in \mathbb{R}$ și $a \leq b$, atunci: $a \cdot c \leq b \cdot c$ dacă $c > 0$ și $a \cdot c \geq b \cdot c$ dacă $c < 0$ și reciproc
5. Dacă $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ și $a \leq b$, $c \leq d$ atunci: $a + c \leq b + d$

I.8.2. Valoarea absolută, valoare maximă, valoare minimă; partea întreagă și partea fracționară

Numărul pozitiv notat $|x|$ reprezintă **valoarea absolută** a numărului real x și este definit astfel:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

$$\text{ex: } |-7| = 7 \qquad |3| = 3 \qquad |0| = 0$$

Obs:

1. Valoarea absolută se mai numește și **modulul** numărului respectiv
2. Din punct de vedere geometric, valoarea absolută semnifică distanța pe axa reală dintre cele două numere

Fie $a, b \in \mathbb{R}$, atunci prin $\max(a, b)$ notăm **maximumul** dintre numerele reale a și b definit astfel:

$$\max(a, b) = \begin{cases} a, & \text{dacă } a \geq b \\ b, & \text{dacă } a < b \end{cases}$$

ex: $\max(-2, -3) = -2$

$\max(-5, |5|) = |5| = 5$

Fie $a, b \in \mathbb{R}$, atunci prin $\min(a, b)$ notăm **minimumul** dintre numerele reale a și b definit

astfel: $\min(a, b) = \begin{cases} a, & \text{dacă } a \leq b \\ b, & \text{dacă } a > b \end{cases}$

I.8.3 Intervale de numere reale

Fie a și b numere reale cu $a \leq b$

Notăm cu $[a; b]$ mulțimea $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$. Acest interval se numește **interval închis** cu extremitățile a, b .

Notăm cu $(a; b)$ mulțimea $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$. Acest interval se numește **interval deschis** cu extremitățile a, b .

Obs. Intervalele deschise spre deosebire de cele închise nu-și conțin extremitățile.

ex. $[-1; 4] = (-1; 4) \cup \{-1; 4\}$

Notăm cu $(a, b]$ mulțimea $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$. Acest interval se numește **interval semideschis** cu extremitățile a, b deschis la stânga și închis la dreapta.

Notăm cu $[a, b)$ mulțimea $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$. Acest interval se numește **interval semideschis** cu extremitățile a, b închis la stânga și deschis la dreapta.

Intervalele de forma: $(a; b); [a; b]; (a, b); [a, b)$ cu a și b date explicit se numesc intervale mărginite.

Intervalele de forma:

$(a; +\infty)$ adică mulțimea $\{x \in \mathbb{R}, x > a\}$

$(-\infty; a]$ adică mulțimea $\{x \in \mathbb{R}, x \leq a\}$

$[a, +\infty)$ adică mulțimea $\{x \in \mathbb{R}, x \geq a\}$

$(-\infty, a)$ adică mulțimea $\{x \in \mathbb{R}, x < a\}$

$(-\infty, +\infty)$ adică mulțimea $\{x \in \mathbb{R}\}$

se numesc **intervale nemărginite**.

Fie $a \in \mathbb{R}$.

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\} = (-a, a)$

$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\} = [-a, a]$

$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\} = (-\infty, -a) \cup (a, \infty)$

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\} = (-\infty, -a] \cup [a, \infty)$

Obs: Intervalele sunt mulțimi asupra cărora se pot aplica toate operațiile studiate în capitolul mulțimi, ca rezultat obținându-se tot intervale de numere reale sau mulțimi vide.

I.8.4.Operații cu numere reale

Adunarea

Prin adunarea a două numere reale se obține un al treilea număr real notat cu $s = a + b$ unde s reprezintă **suma**, iar a și b termenii sumei.

Proprietățile adunării numerelor reale:

1. Comutativitatea: $a + b = b + a$, $a, b \in \mathbb{R}$
2. Asociativitatea: $(a + b) + c = a + (b + c)$, $a, b, c \in \mathbb{R}$
3. Elementul neutru: $a + 0 = 0 + a = a$, $a \in \mathbb{R}$
4. Există elementul opus: $a + (-a) = (-a) + a = 0$

Astfel se poate defini scăderea:

Prin scăderea a două numere reale a, b se obține un al treilea număr real numit **diferență** iar a scăzător și b descuzut, definit astfel: $d = a - b = a + (-b)$

Inmulțirea

Prin înmulțirea a două numere reale a, b numiți **factori** se obține un al treilea număr real p numit **produs** și definit astfel: $p = a \cdot b$

Proprietățile produsului numerelor reale:

1. Comutativitatea: oricare $a, b \in \mathbb{R}$, $a \cdot b = b \cdot a$
2. Asociativitatea: oricare $a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
3. Distributivitatea față de adunare: oricare $a, b, c \in \mathbb{R}$ $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
4. Există elementul 1 numit element neutru cu proprietatea că oricare $a \in \mathbb{R}$, atunci $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
5. Există elementul invers oricărui număr real notat cu $\frac{1}{a}$ astfel: oricare $a \in \mathbb{R}$, există $-a \in \mathbb{R}$

astfel încât $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$

Ridicarea la putere cu exponent număr întreg:

Dacă a este un număr real, iar n un număr natural astfel încât $n \neq 0$ și $n \neq 1$ atunci:
 $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$, unde a este baza iar n exponentul

Obs:

1. Oricare ar fi $a \in \mathbb{R}^*$, $a^0 = 1$
2. Oricare ar fi $a \in \mathbb{R}^*$, $a^1 = a$

Proprietăți:

1. Dacă $a \in \mathbb{R}$ și $m, n \in \mathbb{R}$, atunci $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. Dacă $a \in \mathbb{R}$ și $m, n \in \mathbb{R}$, atunci $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
3. Puterea produsului este egală cu produsul puterilor $(a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n)^m = a_1^m \cdot a_2^m \cdot \dots \cdot a_n^m$, oricare $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{R}$
4. Dacă $a \in \mathbb{R}^*$, $m, n \in \mathbb{R}$, atunci $a^m : a^n = a^{m-n}$
5. Dacă $a \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{R}$ atunci $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Partea întreagă a unui număr real x , notat $[x]$ este cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu x .

$x - [x]$ se notează cu $\{x\}$ și se numește **partea fracționară** a lui x . $\{x\} = x - [x]$

Exemplu:

$$[2,3] = 2 \quad [-4,37] = -5$$

$$[-4,37] = -4,37 - (-5) = 6,63$$

$$\{2,3\} = 0,3$$

Observație:

- 1) Dacă $k \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$ și $k \leq x < k+1, [x] = k$
- 2) $0 \leq \{x\} < 1$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$
- 3) Dacă $\{x\} < 0,5$, atunci rotunjirea la unități a lui x este $[x]$.
- 4) Dacă $0,5 \leq \{x\}$, atunci rotunjirea la unități a lui x este $[x] + 1$

I.9 PUTERI ȘI RADICALI

I.9.1. Rădăcina pătrată a unui număr natural pătrat perfect

Puterea a doua a unui număr natural se mai numește și pătratul acelui număr. Numărul natural care este pătratul altui număr natural se numește **pătrat perfect**.

Exemplu:

- 1) $49 = 7^2$
- 2) $5^{26} = (5^{13})^2$
- 3) $a^{2k} = (a^k)^2$

Teoremă : Pătratul oricărui număr natural se termină numai cu una din cifrele 0,1,4,5,6,9.

I.9.2 Rădăcina pătrată a unui număr rațional pozitiv

Pătratul unui număr rațional este totdeauna pozitiv sau zero (adică negativ).

Fie a un număr rațional negativ ($a \geq 0$). Numărul negativ x se numește rădăcina pătrată a numărului a dacă $x^2 = a$.

Notăm **rădăcina pătrată** a numărului a cu \sqrt{a} . Atunci:

- 1) $a \geq 0$ și $\sqrt{a} = x$ înseamnă $x^2 = a$ și $x \geq 0$
- 2) $(\sqrt{a})^2 = a, a \geq 0$

I.9.3 Proprietățile radicalilor

Numerele iraționale nu pot fi explicit scrise cu orice precizie și din această cauză se preferă să fie scrise sub forma $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ numite notație cu **radicali**. Radicalii au câteva proprietăți remarcabile:

1. Radicalii se înmulțesc astfel: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$, unde $a, b \geq 0$

Exemplu: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{2 \cdot 3} = 6$

2. Radicalii se împart

astfel: $\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{a:b}$, unde $a \geq 0, b > 0$ sau $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$, unde $a \geq 0, b > 0$

Exemplu: $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2$

3. Dacă $a \in \mathbb{R}^*$ avem $|a| = a$ și deci $\sqrt{a^2} = a$

Exemplu: $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$
 $\sqrt{180} = \sqrt{4 \cdot 9 \cdot 5} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{5} = 6\sqrt{5}$

Observație: Proprietatea 3 este adevărată și reciproc atunci când dorim să introducem sub radicali anumiți termeni.

Exemplu: $5\sqrt{3} = \sqrt{5^2 \cdot 3} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{75}$

Numim operație de **raționalizare** a numitorului unei fracții, care conține la numitor radicali, amplificarea acestuia astfel ca numitorul să nu mai conțină radicali. Astfel pentru:

$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$ am amplificat cu \sqrt{b}

$\frac{a}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{a(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{x - y}$ am amplificat cu $\sqrt{x} - \sqrt{y}$

I.9.4 Ordinea efectuării operațiilor

- 1) Adunarea și scăderea sunt numite operații de ordinul I
- 2) Înmulțirea și împărțirea sunt numite operații de ordinul II
- 3) Ridicarea la putere și radicalii sunt numite operații de ordinul III

Ordine de efectuare:

- A. Dacă în expresie nu există paranteze, iar operațiile sunt de același ordin, ele se efectuează de la stânga spre dreapta.
- B. Dacă în expresie nu există paranteze, iar operațiile nu sunt de același ordin, prima dată se efectuează operațiile de ordin III, iar apoi de ordin II și ultimele operațiile de I.
- C. Dacă în expresie există paranteze, se efectuează prima dată operațiile dintre paranteze, acolo unde este posibil.

I.9.5 Medii

Media aritmetică a două sau mai multe numere reale este numărul real obținut prin împărțirea sumei numerelor respective la numărul lor.

Pentru numerele reale a_1, a_2, \dots, a_n avem:

$$m_a = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

Exemplu: pentru 2, 5, 8: $m_a = \frac{2+5+8}{3} = \frac{15}{3} = 5$

Media geometrică sau **proporțională** a două numere pozitive este egală cu rădăcina pătrată din produsul lor.

$$a \geq 0, b \geq 0 \quad m_g = \sqrt{a \cdot b}$$

Media geometrică a două numere pozitive este cuprinsă între cel mai mic și cel mai mare dintre numerele respective

Dac $0 \leq a \leq b$, atunci $a \leq \sqrt{a \cdot b} \leq b$

Exemplu: pentru 2,8 $m_g = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4$

Media aritmetic ponderat a numerelor a_1, a_2, \dots, a_n cu ponderile p_1, p_2, \dots, p_n (pozitive) este:

$$m_p = \frac{a_1 \cdot p_1 + a_2 \cdot p_2 + \dots + a_n \cdot p_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}$$

Exemplu: pentru $2\sqrt{5}$ i $3\sqrt{2}$ cu ponderile 2 i 5 $m_p = \frac{2\sqrt{5} \cdot 2 + 3\sqrt{2} \cdot 5}{2+5} = \frac{4\sqrt{5} + 15\sqrt{2}}{7}$

I.9.6. Rapoarte i propor ii

Num rul ra ional $a:b$, unde a i b sunt numere ra ionale i $b \neq 0$, se nume te **raportul** numerelor a i b i se noteaz prin $\frac{a}{b}$ (a i b se numesc termenii raportului).

Exemplu: $\frac{5,4}{2,8}; \frac{2\frac{1}{4}}{5\frac{1}{2}}$

Egalitatea a dou rapoarte se nume te **proporie**: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

O proporie are 4 termeni: 2 mezi (b i c) i 2 extremi (a i d).

Proprietate: Proprietatea fundamental a proporiei:

Fie $a, c \in \mathbb{Q}_+ \cup \{0\}$, $b, d \in \mathbb{Q}$:

Dac $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, atunci $a \cdot d = b \cdot c$ i reciproc, dac $a \cdot d = b \cdot c$, atunci $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Exemplu:

$$\text{din } \frac{2,5}{6} = \frac{7,5}{18} \Rightarrow 2,5 \cdot 18 = 6 \cdot 7,5$$

$$\text{din } 7 \cdot 9 = 21 \cdot 3 \Rightarrow \frac{7}{3} = \frac{21}{9}$$

Dac într-o proporie se cunosc trei din cei patru termeni, îl putem afla pe al patrulea astfel:

$$\text{un extrem} = \frac{\text{produsul mezilor}}{\text{cel}}$$

$$\text{un mez} = \frac{\text{produsul extremilor}}{\text{cel}}$$

Exemplu:

$$1) \quad \frac{x}{10} = \frac{4}{5} \Rightarrow x = \frac{4 \cdot 10}{5} = 8$$

$$2) \quad \frac{3}{7} = \frac{x}{11} \Rightarrow x = \frac{3 \cdot 11}{7} = \frac{33}{7}$$

Dou m rimi variabile care depind una de cealalt astfel încât dac m sura uneia cre te (descre te) de un num r de ori, atunci i m sura celeilalte cre te (descre te) de acela i num r de ori, se numesc m rimi **direct propor ionale**.

M1	a	b
M2	c	d

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{sau} \quad a \cdot d = b \cdot c \quad \text{sau} \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

Două mrimi variabile care depind una de cealaltă astfel încât dacă mrimura uneia crește (decrește) de un număr de ori, atunci mrimura celeilalte scade (crește) de același număr de ori, se numesc mrimi invers proporționale.

Mrimile M_1 și M_2 sunt **invers proporționale** dacă :

M1	a	b
M2	c	d

$$\frac{a}{b} = \frac{d}{c} \quad \text{sau} \quad a \cdot c = b \cdot d \quad \text{sau} \quad \frac{a}{1} = \frac{b}{\frac{1}{c}}$$

Numărul p din proporția $\frac{a}{b} = \frac{p}{100}$ se numește **procent** și reprezintă cât la sută din numărul

$b \neq 0$ este numărul a sau cât la sută este a din b ; $p = (a \cdot 100) : b$.

Se scrie p urmat de semnul „%” și se citește „ p la sută”.

Exemplu: 25 este 4% din 625 deoarece $\frac{25}{625} = \frac{4}{100}$

Pentru a afla $p\%$ dintr-un număr se înmulțește numărul cu $\frac{p}{100}$: $p\%$ din a este $\frac{p}{100} \cdot a$

Dacă $p\%$ din x este a , atunci $\frac{p}{100} \cdot x = a$, deci $x = a : \frac{p}{100} = a \cdot \frac{100}{p}$

Exemplu: 5% din 20 este $\frac{5}{100} \cdot 20 = \frac{1}{20} \cdot 20 = 1$

Calculul **probabilității** de realizare a unui eveniment: Dacă p este probabilitatea realizării evenimentului, m - numărul cazurilor favorabile; n - numărul cazurilor posibile, atunci: $p = \frac{m}{n}$

II CALCUL ALGEBRIC

II.1 Reguli de calcul prescurtat

1. $ab + ac = a(b + c)$
2. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
3. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
4. $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$
5. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
6. $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
7. $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
8. $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
9. $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$
10. $(a - b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc$
11. $(a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$
12. $(a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$

II.2 Inegalități

O **inegalitate** reprezintă o relație matematică adevărată sau falsă care se stabilește între două expresii matematice. În general, cu inegalitățile se respectă următoarele reguli specifice:

A. Dacă a, b, c sunt numere reale astfel încât $a < b$, atunci $a + c < b + c$

B. Dacă a, b, c sunt numere reale astfel încât $a < b$ și $c > 0$, atunci $ac < bc$

C. Dacă $a < b$ și $c < 0$, atunci $ac > bc$

D. Dacă înmulțim ambii termeni ai unei inegalități cu un număr negativ, sensul inegalității se schimbă (se inversează).

Observație: Regulile A, B, C, D sunt valabile și dacă înlocuim semnul $<$ cu \leq , respectiv $>$ cu \geq .

Exemplu: $-6 < 7$

-Prin înmulțire la ambii membri cu 5: $-1 < 13$ adevărat

-Prin înmulțire cu 2: $-12 < -14$ adevărat

-Prin înmulțire cu -2: $12 > -14$ adevărat

II.3. Calcul cu numere reale reprezentate prin litere

Produsul dintre un număr real și o sumă algebrică se efectuează înmulțind acest număr cu fiecare termen al sumei, respectând regula semnelor de la înmulțire, după care se adună noii termeni astfel obținuți.

Exemplu:

$$k(a + b - c) = ka + kb - kc$$

$$-k(-a + b - c) = ka - kb + kc$$

Produsul dintre două sume algebrice se efectuează înmulțind fiecare termen al unei sume cu fiecare termen al celei de-a doua și însumând noii termeni astfel obținuți.

Exemplu:

$$(a + b - c)(d - e) = ad - ae + bd - be - cd + ce$$

III. FUNCȚII

Dacă printr-un procedeu oarecare facem ca oricărui element din mulțimea A să-i corespundă un singur element dintr-o altă mulțime B, spunem că am definit o **funcție** de la A la B.

A se numește **mulțimea** (domeniul) **de definiție** a funcției.

B se numește mulțimea în care funcția ia valori (codomeniul).

Procedeu se numește lege de corespondență

Notă: $f: A \rightarrow B$ citit "f definit pe A cu valori în B"

Exemplu: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 3$

Observație: Pentru a caracteriza o funcție trebuie date trei elemente:

1) mulțimea de definiție;

- 2) legea de corespondență ;
- 3) mulțimea în care ia valori ;

Două funcții sunt **egale** dacă :

- 1) au aceeași mulțime de definiție
- 2) $f(x)=g(x)$ pentru orice element din mulțimea de definiție ;
- 3) iau valori în aceeași mulțime.

Mulțimea de puncte având coordonatele în plan (x,y) , unde x este un element din mulțimea de definiție A , iar $y=f(x)$ se numește **graficul** funcției f .

O funcție $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ descrisă de o lege de forma $f(x)=ax+b$, unde a și b sunt constante reale, se numește **funcție liniară**.

Observație: Graficul unei funcții liniare este o dreaptă.

Pentru **reprezentarea grafică a unei funcții liniare** urmăm algoritmul :

1) Se calculează $f(0)=b$. Se reprezintă punctul $(0,b)$. Acest punct reprezintă punctul de intersecție dintre graficul funcției și axa ordonatelor Oy .

2) Se rezolvă ecuația $ax+b=0$. Se reprezintă punctul $(-\frac{b}{a}, 0)$. Acest punct reprezintă punctul de intersecție dintre graficul funcției și axa absciselor Ox .

3) Se trasează dreapta care unește cele două puncte obținute și astfel se trasează graficul funcției liniare $f(x)=ax+b$.

Observații :

1) Dacă $a=0$ și $b \neq 0$ obținem funcții de genul $f(x)=b$ ale căror grafice sunt paralele cu axa Ox . Aceste funcții se numesc constante nenule.

2) Dacă $a \neq 0$ și $b=0$, se obțin funcții de forma $f(x)=ax$, funcții care trec prin originea sistemului de axe.

3) Pentru $a=b=0$, se obține ca grafic chiar axa absciselor Ox .

Proprietăți ale funcțiilor liniare :

Fie funcția $f: A \rightarrow B$ definită printr-o relație $f(x)$.

Proprietatea 1: Dacă pentru oricare ar fi $r,s \in A$ cu $r > s$, avem $f(r) > f(s)$ și spunem că funcția este **strict crescătoare**.

Proprietatea 2: Dacă pentru oricare ar fi $r,s \in A$ cu $r > s$, avem $f(r) < f(s)$ și spunem că funcția este **strict descrescătoare**.

Observație: În general, o funcție descrisă de legea $f(x)=ax+b$ poate fi:

- strict crescătoare dacă $a > 0$,
- constantă dacă $a=0$,
- strict descrescătoare dacă $a < 0$.

IV.ECUAȚII INECUAȚII

O **ecuație** este o propoziție cu o variabilă (propozițiile cu o singură variabilă se mai numesc și predicat) în care apare, o singură dată, semnul de egal.

Exemplu: $2x-1=5$ cu $x \in \{0, 2, 3, 5\}$

$$\frac{2x+3}{2x^2-1} = 1; x \in \mathbb{R}$$

O ecuație cu o necunoscută are forma generală: $S(x)=D(x)$, $x \in M$; necunoscuta fiind x , iar S și D se numesc membrul stâng și respectiv membrul drept al ecuației, iar M este mulțimea soluțiilor ecuației.

Observații:

1. Orice valoare din mulțimea M poate fi înlocuită în ecuație și se poate obține o propoziție adevărată sau falsă. Dacă propoziția obținută este adevărată atunci valoarea respectivă este **soluție** a ecuației.
2. Prin rezolvarea ecuației în alegem mulțimea tuturor soluțiilor ecuației, din mulțimea M .

Exemplu: din $2x-1=5$, $x \in \{0,2,3,5\}$ prin înlocuirea lui x obținem o propoziție adevărată doar pentru $x=3$.

Două ecuații sunt **echivalente** dacă au aceleași soluții.

Notăm: " \Leftrightarrow " semnul echivalenței dispus între două ecuații, adică: $S(x)=D(x) \Leftrightarrow S'(x)=D'(x)$

Există o serie de proprietăți pe care ne bazăm în rezolvare și pe care folosindu-le obținem ecuații echivalente și astfel găsim mulțimea de soluții ale ecuației.

Proprietate: Adunând la (sau scăzând din) ambii membri ai unei ecuații același număr real obținem o ecuație echivalentă cu prima.

Consecință: Se pot trece termenii unei ecuații din membrul stâng în membrul drept și invers schimbând doar semnul termenului.

Exemplu: $3x+1=2x+1 \quad | \quad +(-1) \Leftrightarrow 3x=2x$

Proprietate: Înmulțind (sau împărțind) ambii membri ai unei ecuații cu același număr real, diferit de zero, se obține o ecuație echivalentă.

Exemplu: $4x-2=5 \quad | \quad \cdot 2 \Leftrightarrow 8x-4=10$

Proprietate: O ecuație este nedeterminată dacă există mai mult de o valoare din mulțimea M care generează propoziții adevărate prin înlocuire în ecuație.

Exemplu: $2x-1=(6x-2)-4x+1$, $x \in \mathbb{R}$ echivalent cu $0=0$, adică adevărat pentru orice x real.

IV. 1. ECUAȚIA DE GRADUL I

O ecuație de forma $ax+b=0$, $x \in \mathbb{R}$ în care $a \neq 0$; $a, b \in \mathbb{R}$ poartă denumirea de **ecuație de gradul I** cu o necunoscută. **Soluția** ecuației este unică, $x = -\frac{b}{a}$

Exemplu: $2x-2=0 \Leftrightarrow 2x=2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{2} \Leftrightarrow x=1$

IV.2 SISTEME DE ECUAȚII DE GRADUL I

Un **sistem de ecuații** reprezintă o colecție de două sau mai multe ecuații care au aceleași necunoscute.

Observație: Dacă în ecuații necunoscutele sunt la puterea 1, atunci sistemul este un sistem de ecuații de gradul I.

Rezolvarea unui sistem de ecuații se bazează pe proprietățile enunțate la capitolul ecuații. Astfel, distingem două metode devenite clasice:

1. Metoda substituției:

Se exprimă una din necunoscute dintr-o ecuație și se înlocuiește în cea de-a doua rezultând o ecuație cu o singură necunoscută care se rezolvă și apoi se exprimă și cea de-a doua necunoscută.

$$\text{Exemplu : } \begin{cases} 2x + y = 4 \\ x + 2y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 - 2x \\ x + 2(4 - 2x) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{8}{3} \end{cases}$$

2. Metoda reducerii:

Se înmulțesc ecuațiile cu expresii a căror valoare este astfel aleasă încât în urma adunării ecuațiilor obținute, să rezulte o ecuație cu o singură necunoscută.

$$\text{Exemplu : } \begin{cases} 2x + y = 4 \\ x + 2y = 6 \end{cases} \begin{matrix} |(-1) \\ |2 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - y = -4 \\ 2x + 4y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow 3y = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{8}{3} \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

IV.3 ECUAȚIA DE GRADUL AL-III-LEA

Ecuația de forma $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$ poartă denumirea de **ecuație de gradul al III-lea**. Se numește **soluție** a ei un număr real α astfel încât: $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$

Rezolvarea ecuației de gradul al III-lea:

Se calculează **discriminantul** ecuației cu formula: $\Delta = b^2 - 4ac$

În funcție de semnul acestuia, avem cazurile:

I. $\Delta < 0 \Rightarrow$ ecuația nu admite soluții reale

II. $\Delta = 0 \Rightarrow$ ecuația are o rădăcină reală dublă: $x = -\frac{b}{2a}$

III. $\Delta > 0 \Rightarrow$ ecuația are două rădăcini reale distincte: $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$\text{Exemplu: a) } x^2 + x + 1 = 0 \\ \Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3 < 0 \Rightarrow \text{nu avem soluții reale}$$

$$4x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$\text{b) } \Delta = 4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 16 - 16 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = -\frac{4}{4 \cdot 2} = -\frac{1}{2}$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\text{c) } \Delta = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x_1 = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3 \quad x_2 = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

IV.4 INECUAȚII

O relație de tipul $f(x)$ rel. $g(x)$, unde rel. reprezintă o relație de tipul $<, >, \leq, \geq$ iar $f(x)$ și $g(x)$ sunt funcții definite pe numere reale cu valori reale se numește **inecuație**.

A rezolva o inecuație înseamnă a găsi toate valorile lui $x \in \mathbb{R}$, pentru care este adevărată inegalitatea. Pentru rezolvare se transformă inecuația în inecuații echivalente mai simple pe baza unor proprietăți ale inecuațiilor.

Proprietăți:

1. Dacă $a < b$, atunci $a + c < b + c$ și $a - c < b - c$
2. Dacă $a < b$ și $c > 0$, atunci $a \cdot c < b \cdot c$ și $a : c < b : c$
3. Dacă $a < b$ și $c < 0$, atunci $a \cdot c > b \cdot c$ și $a : c > b : c$
4. Dacă vrem, în loc de $a < b$ putem scrie și $b > a$

Observație: Aceleași proprietăți sunt valabile și dacă înlocuim semnul $<$ cu \leq sau semnul $>$ cu \geq .

Două sau mai multe inecuații grupate se numesc **sistem de inecuații**.

A rezolva un sistem de inecuații înseamnă găsirea acelor valori ale necunoscutei care îndeplinesc simultan condițiile din inecuațiile respective. Aceste valori se determină prin rezolvarea fiecărei inecuații și apoi determinarea prin operația de intersecție a mulțimii de soluții comune.